

# 証明の萌芽としての小学校算数科における説明構成力の研究

神戸大学附属小学校  
赤川 峰大

## 1. はじめに

### 1.1 社会的要請

学習指導要領（文科省, 2017）では、論理的思考力・表現力が、汎用的な資質・能力としても重要視されているが、算数・数学教育においては、中学校の図形の証明問題の正答率が低いこと（平成 29 年度全国学力・学習状況調査中学校 45.0%）が示すように、その育成の難しさが指摘されている。そのため近年では、小学校算数科における「説明」を「証明の萌芽」として捉えた系統的育成が急務とされている。しかし小学校算数科における「説明」は、中学校数学科の「証明」とは異なりカリキュラム上の位置付けがないために、小学校現場での指導は各教師任せになっており、目的の曖昧な算数科の説明活動が散見される。本研究では、その改善を目的として、「仮言的三段論法」と「普遍例化」に着目し、「説明」を論理的に構成することに関わる小学校段階の実態調査並びに授業開発を行なうこととした。

### 1.2 研究課題と研究方法

「証明」と小学校段階の「説明」の共通点として「仮言的三段論法」と「普遍例化」に着目することで、演繹的推論を用いて「説明」を構成することに関わる小学校段階の子どもの実態を明らかにするためにまず、仮言的三段論法と普遍例化が「証明」と小学校段階の「説明」の共通点として位置付けられることを明らかにする。具体的には演繹的推論を育成する手段としての「証明」の意義を明らかにした上で、「証明」を構成するための演繹的推論として仮言的三段論法と普遍例化が用いられていることを先行研究から明らかにする。次に仮言的三段論法と普遍例化によって構成される小学校算数科題材における「説明」を事例的に示すことで、小学校段階の「説明」と「証明」に、共通の手順があることを明らかにする。

## 2. 先行研究の概観

### 2.1 演繹的推論と証明

演繹推論とは、前提となる命題をもとにある命題を結論として得る推論である。演繹的推論は、数学で扱う論理の基盤として重要視されてきた。中学校段階の証明は、前提から結論までの演繹的推論が求められるため、国内外で証明を通した演繹的推論の育成の在り方が検討されてきた。

Yang (2008) は、前提と結論を演繹的に結び付ける過程 [Chaining elements] において、図形の性質 (property) による演繹的推論が用いられるとした。Miyazaki (2017) は、[Chaining elements] において用いられる演繹的推論を、更に「仮言的三段論法」と「普遍例化」に細分化した。本研究ではこれらの先行研究と同じ立場を取り、証明を構成するために用いられる演繹的推論として、仮言的三段論法と普遍例化に着目することとする。

## 2.2 仮言的三段論法と普遍例化

仮言的三段論法は、命題「P1 ならば P2」「P2 ならば P3」から「P1 ならば P3」という結論を導く演繹的推論であり、 $[P1 \rightarrow P2] \wedge [P2 \rightarrow P3] \Rightarrow [P1 \rightarrow P3]$  と表す。 $[P1 \rightarrow P2]$ 、 $[P2 \rightarrow P3]$  という2つの命題から、 $[P1 \rightarrow P3]$  を導くためには、P2 を媒介として  $[P1 \rightarrow P2]$  と  $[P2 \rightarrow P3]$  を結び付ける必要がある。またこの推論は n 段論法として連鎖させることが可能であり、連鎖した仮言的三段論法  $[P1 \rightarrow P2] \wedge [P2 \rightarrow P3] \wedge \dots \wedge [P_{n-1} \rightarrow P_n] \Rightarrow P1 \rightarrow P_n$  を本研究では n 段論法モデルと呼ぶ。普遍例化は前提となる  $\forall xP(x)$  から  $P(a)$  という結論を導く演繹的推論である。 $\forall xP(x)$  を全称命題、主語が任意特定の対象 a について言明する命題  $P(a)$  を単称命題といい、 $\forall xP(x) \Rightarrow A(a)$  と表す。

## 3. 小学校算数科教材の調査

仮言的三段論法と普遍例化が中学校段階の「証明」と小学校段階の「説明」の共通点として位置付けられることを明らかにするために、仮言的三段論法と普遍例化によって構成される小学校算数科教材における「説明」を事例的に示す。本研究における仮言的三段論法によって構成される「説明」とは、説明に用いられる命題が、 $[P1 \rightarrow P2] \wedge [P2 \rightarrow P3] \wedge \dots \wedge [P_{n-1} \rightarrow P_n] \Rightarrow P1 \rightarrow P_n$  (n 段論法モデル) で表現できる説明とする。従って説明に用いられる命題が n 段論法を用いて前提から結論へと導かれているかどうかを分析する。本研究における普遍例化によって構成される「説明」とは、説明において全称命題  $\forall xP(x)$  が真であることを前提として、単称命題  $P(a)$  の真を保障する説明とする。従って説明に用いられる命題の中で、全称命題・単称命題に分類される命題が存在するかどうかを分析する。分析の結果多数の題材が特定されたが、その内本稿では、2 点を挙げる。

### 3.1 第3学年「三角形と角」

第3学年【C 図形領域】(1) 二等辺三角形、正三角形などの図形、「三角形と角」の単元に、円周上の2点と中心を結んだときにできる三角形が二等辺三角形であることを同定するとともに、その理由についての説明が要求される題材がある(図1)。この題材の説明では、最終的に「三角形アイウは、2つの辺(辺アイと辺アウ)が円の半径であるならば、三角形

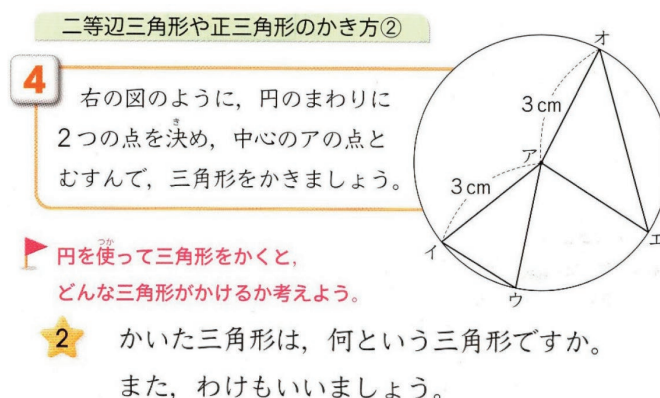


図1 東京書籍『新しい算数』2015、3年下、p87(一部抜粋)

アイウは、二等辺三角形である」を結論付けるために、仮言的三段論法  $[p(a) \rightarrow q(a)] \wedge [q(a) \rightarrow r(a)] \Rightarrow [p(a) \rightarrow r(a)]$  が用いられている (表1)。また仮言的三段論法を成立させるために、全称命題  $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$  「円の半径ならば長さが等しい」を前提として、単称命題  $p(a) \rightarrow q(a)$  「三角形アイウは、2つの辺 (辺アイと辺アウ) が円の半径であるならば、2つの辺 (辺アイと辺アウ) の長さは等しい」を導き、全称命題  $\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$  「2つの辺の長さが等しい三角形ならば二等辺三角形である」を前提として、単称命題  $q(a) \rightarrow r(a)$  「三角形アイウは、2つの辺 (辺アイと辺アウ) の長さが等しいならば、三角形アイウは、二等辺三角形である」を導く普遍例化が用いられていると分析できる。

表1 第3学年「三角形と角」の説明

	単称命題	全称命題
p (a)	三角形アイウは、2つの辺 (辺アイと辺アウ) が円の半径である。	$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$
q(a)	三角形アイウは、2つの辺 (辺アイと辺アウ) の長さが等しい。	円の半径ならば長さが等しい。
		$\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$
r(a)	三角形アイウは、二等辺三角形である。	2つの辺の長さが等しい三角形ならば二等辺三角形である。
$p(a) \rightarrow r(a)$	三角形アイウは、2つの辺 (辺アイと辺アウ) が円の半径であるならば、三角形アイウは、二等辺三角形である。	

### 3.2 第4学年「垂直・平行と四角形」

第4学年【C 図形領域】(1) 平行四辺形、ひし形、台形、「垂直・平行と四角形」の単元に、半径が等しい円を2つかいたときの交点と円の中心を直線で結んだときにできる四角形がひし形である理由を説明する題材がある (図2)。この題材の説明では、最終的に「四角形ADBCは、4つの辺 (辺ACと辺ADと辺BCと辺BD) が円の半径であるならば、四角形ADBCは、ひし形である」を結論付けるために、仮言的三段論法  $[p(a) \rightarrow q(a)] \wedge [q(a) \rightarrow r(a)] \Rightarrow [p(a) \rightarrow r(a)]$  が用いられている (表2)。また仮言的三段論法を成立させるために、全称命題  $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$  「円の半径ならば長さが等しい」を前提として、単称命題  $p(a) \rightarrow q(a)$  「四角形ADBCは、4つの辺 (辺ACと辺ADと辺BCと辺BD) が円の半径であるならば、四角形ADBCは、4つの辺 (辺ACと辺ADと辺BCと辺BD) の長さが等しい」を導き、全称命題  $\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$  「4つの辺の長さが等しい四角形ならばひし形である」を前提として、単称命題  $q(a) \rightarrow r(a)$  「四角形ADBCは、4つの辺 (辺ACと辺ADと辺BCと辺BD) の長さが等しいならば、四角形ADBCは、ひし形である」を導く普遍例化が用いられていると分析できる。

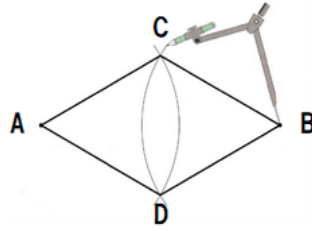


図2 東京書籍『新しい算数』2015、4年上、p76(一部改)

表2 第4学年「垂直・平行と四角形」

	単称命題	全称命題
p(a)	四角形ADBCは、4つの辺(辺ACと辺ADと辺BCと辺BD)が円の半径である。	$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$
q(a)	四角形ADBCは、4つの辺(辺ACと辺ADと辺BCと辺BD)の長さが等しい。	円の半径ならば長さが等しい。
r(a)	四角形ADBCは、ひし形である。	$\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$
p(a) $\rightarrow$ r(a)	四角形ADBCは、4つの辺(辺ACと辺ADと辺BCと辺BD)が円の半径であるならば、四角形ADBCは、ひし形である。	4つの辺の長さが等しい四角形ならばひし形である。

### 3.3 証明と小学校段階の説明の共通点

分析によって、仮言的三段論法と普遍例化によって構成される小学校算数科題材における「説明」が複数特定された。このことから、少なくとも本稿で特定した小学校算数科題材においては、仮言的三段論法と普遍例化を、「説明」と「証明」の共通点として、位置付けることができる。しかし前述のように、小学校段階の説明は明示的に指導されてはいないため、仮言的三段論法と普遍例化を用いて説明を構成することに関わる小学校段階の子どもの実態は明らかになっていない。そこで特定した小学校算数科題材による調査を行うことで、演繹的推論を用いて「説明」を構成することに関わる小学校段階の子どもの実態を明らかにする。

## 4. 児童実態の調査 I

仮言的三段論法や普遍例化を用いて「説明」する際の、命題の順序に関する児童の理解の様相を実証的に明らかにするため、第4-6学年児童を対象にした調査を行った。題材は、円と三角形である。

<sup>1</sup> Lin(2007)のRCGP testを援用し作成した命題の並べ替えに関する質問紙調査を行い、児童が並べ替えた選択肢の順序を分析することで、「説明」を構成する際の児童の命題の順序に関する

<sup>1</sup> Lin(2007)は図形に関する証明の読解に特化したRCGP(The Reading Comprehension of Geometric Proofs)モデルを用いて中等教育段階の子どもの対象に、「証明を読むこと」に関する実態調査(RCGP test)を行っている。その中で、前提と結論を演繹的に結び付ける段階として設定した[Chaining elements]の実態を分析するため、命題の順序に関わる問題を開発し、前提から結論までの5つの命題の内、2つの命題を入れ替えることの妥当性を記述させている。尚、Lin(2007)では「証明を読むこと」全般に関わる実態を調査することを目的にスコアでの量的な分析がなされているが、子どもの記述から[Chaining elements]の実態についての詳細な分析は行われていない。

理解の様相を考察した。具体的には仮言的三段論法を用いた順序である  $[P1 \rightarrow P2] \wedge [P2 \rightarrow P3] \wedge \dots \wedge [Pn-1 \rightarrow Pn] \Rightarrow P1 \rightarrow Pn$  順序で選択肢を並べているか、また普遍例化を用いた順序である全称命題  $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$  の後に単称命題  $p(a) \rightarrow q(a)$  を位置付ける順序で選択肢を並べているかを分析した。国立大学附属小学校 4 - 6 年計 193 名を対象に 2019 年 6 月に質問紙法による調査を実施した。調査問題の題材は、図 1 を用いることとする。

#### 4.1 調査問題と分析方法

本研究が対象とする仮言的三段論法は  $[P1 \rightarrow P2] \wedge [P2 \rightarrow P3] \Rightarrow [P1 \rightarrow P3]$  という単称命題同士の順序、そして普遍例化は全称命題と単称命題の順序が問われる。そこで RCGP モデルを援用することで、命題の順序に関する問題を作成し調査することとする。

調査問題は二種類実施する。調査問題 A は命題の並べ替えを通して、命題の順序に関する理解を調査する問題、調査問題 B は提示された命題の順序の妥当性を考えることを通して、命題の順序に関する理解を調査する問題である。いずれの問題も、小学校第 3 学年の題材 (図 1) を用いた。命題の並べ替えを行う調査問題 A (図 3) は、「円のまわりにとった 2 つの点と中心の点を結んで三角形をかいたとき、三角形アイウが二等辺三角形になる理由を説明した文がばらばらになった」と問題場面を設定した。各命題と関連付けた選択肢を設定 (表 3) し、選択肢の並べ替えを通して、命題の順序を考える問題とした。分析の視点は、仮言的三段論法と普遍例化である。仮言的三段論法  $[P1 \rightarrow P2] \wedge [P2 \rightarrow P3] \Rightarrow [P1 \rightarrow P3]$  に関わって、 $[P1 \rightarrow P2]$  に該当する選択肢は②、 $[P2 \rightarrow P3]$  に該当する選択肢は③である。本来は、真理関数としても日常論理としても  $\wedge$  で結合された  $[P1 \rightarrow P2]$  と  $[P2 \rightarrow P3]$  は可換的であるが、本稿では、説明を構成する際の命題の順序についての児童の傾向を明らかにすることが目的であるため、 $[P1 \rightarrow P2]$  で「辺アイと辺アウの長さが等しい (P2)」を導いた後に、P2 を仲立ちとして  $[P2 \rightarrow P3]$  を導く順序を、仮言的三段論法を用いた命題の順序とする。よって仮言的三段論法を視点とした分析とは、選択肢②より後に③が位置付けられていることを調べることである。②より後に③が位置付く順序で命題を並べた回答を「正答」、その逆を「誤答」と判別した。

普遍例化に関わる選択肢は 2 箇所ある。1 箇所目は全称命題に該当する選択肢④とそれに伴う単称命題②である。2 箇所目は選択肢①とそれに伴う単称命題③である。よって普遍例化を視点とした分析とは、④より後に②が、そして①より後に③が位置付けられていることを調べることである。④より後に②を位置付け、また①より後に③を位置付けて並べた回答を「正答」、その逆を「誤答」とした。したがって、いずれの条件も満たす 3 種類の回答である④②①③、①④②③、④①②③が、前提から結論を仮言的三段論法と普遍例化を用いて演繹的に導いている説明になる。

命題の順序の妥当性を問う調査問題 B は、仮言的三段論法または普遍例化を用いる際の命題の順序とは異なる順序を示し、その順序についての意見を自由記述する問題である。問題 B-1 (図 4) は、仮言的三段論法に関する調査問題である。命題を④①③②の順序で示し、③の後に②が位置付けられることの妥当性を記述させた。③は  $[P2 \rightarrow P3]$  に該当し、②は  $[P1 \rightarrow P2]$  に該当する選択肢である。そのため、仮言的三段論法  $[P1 \rightarrow P2] \wedge [P2 \rightarrow P3] \Rightarrow [P1 \rightarrow P3]$  を用いるためには、②の後に③を位置付けられる必要がある。仮言的三段論法を用いる際の命題の順序を分析

する目的で作成した。問題 B-2 (図 5) は、普遍例化に関する調査問題である。児童の負担を考慮し 2 つの普遍例化の内、全称命題「円の半径の長さは等しい」から、単称命題「辺アイと辺アウの長さは等しい」が導かれている箇所のみを調査として扱った。命題を②④①③の順序で示し、②の後に④が位置付けられることの妥当性を記述させた。②は単称命題「辺アイと辺アウの長さは等しい」、④は全称命題「円の半径の長さは等しい」であるため、④の後に②を位置付けられる必要がある。普遍例化を用いる際の命題の順序を分析する目的で作成した。調査問題 A の分析とともに、調査問題 A、B のクロス分析も行う。以上の分析を通して、説明を構成する際の小学校段階の子どもの命題の順序に関する理解の実態を明らかにする。

**【問題】**

上の図のように、円のまわりに 2 つの点イ、点ウを決め、中心のアの点とむすんで三角形をかきました。  
 三角形アイウが、二等辺三角形になる理由を説明した文がばらばらになってしまいました。  
 下の文をならべかえて、説明をつくりましょう。

① 2 つの辺の長さが等しい三角形を、二等辺三角形といいます。

② この図は点アが中心の円だから、アイと、アウの長さは等しいです。

③ アイとアウの長さは等しいので、三角形アイウは、二等辺三角形です。

④ 円の半径の長さは全て等しいです。

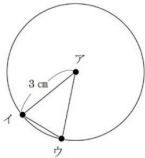
( ) → ( ) → ( ) → ( )

図3 調査問題A

表 3 選択肢と命題との関連

	命題	選択肢
	円の半径の長さは等しいので	④
P1 → P2	この図形が円ならば、 辺アイと辺アウの長さは等しい。	②
	2 つの辺の長さが等しい三角形を、二等辺三角形というので	①
P2 → P3	辺アイと辺アウの長さは等しいならば、 三角形アイウは、二等辺三角形である。	③
P1 → P3	この図形が円ならば、 三角形アイウは、二等辺三角形である。	/

図のように円のまわりに2つの点イ、点ウを決め、中心の点アとむすんで三角形をかきました。三角形アイウが、二等辺三角形になる理由を説明した文がばらばらになってしまいました。たろうくんが文をならべかえて、下のような順じよで説明をつくりました。この説明についてあなたの意見を書きましょう。



①2つの辺の長さが等しい三角形を、二等辺三角形といいます。  
 ②この図は点アが中心の円だから、アイと、アウの長さは等しいです。  
 ③アイとアウの長さは等しいので、三角形アイウは、二等辺三角形です。  
 ④円の半径の長さは全て等しいです。

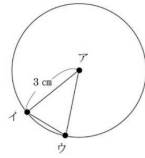
《たろうくんの考え》  
 ④ → ① → ③ → ②

(1) たろうくんの考えで、特に四角でかまれた部分の順じよ (③のあとに②がくること) についてあなたはどう思いますか。  
 問題がある  問題はない  どちらともいえない

(2) そう考えた理由を教えてください。

図4 調査問題B-1

図のように円のまわりに2つの点イ、点ウを決め、中心の点アとむすんで三角形をかきました。三角形アイウが、二等辺三角形になる理由を説明した文がばらばらになってしまいました。はなさんが文をならべかえて、下のような順じよで説明をつくりました。この説明についてあなたの意見を書きましょう。



①2つの辺の長さが等しい三角形を、二等辺三角形といいます。  
 ②この図は点アが中心の円だから、アイと、アウの長さは等しいです。  
 ③アイとアウの長さは等しいので、三角形アイウは、二等辺三角形です。  
 ④円の半径の長さは全て等しいです。

《はなさんの考え》  
 ② → ④ → ① → ③

(1) はなさんの考えで、特に四角でかまれた部分の順じよ (②のあとに④がくること) についてあなたはどう思いますか。  
 問題がある  問題はない  どちらともいえない

(2) そう考えた理由を教えてください。

図5 調査問題B-2

## 4.2 調査問題Aの分析結果

仮言的三段論法の順序で命題を並べた回答数(正答数)の学年による違いを調べるため正答を1点、誤答を0点として数値化し、仮言的三段論法の結果(表4)における平均点を学年間で比較した。一元配置分散分析(対応なし)を行った結果、学年間の平均点には、5%水準で有意差は見られなかった。 $(F(2, 190) = 0.81, n. s.)$ 。普遍例化の順序で命題を並べた回答数(正答数)の学年による違いを調べるため正答を1点、誤答を0点とした数値化を行い、普遍例化の結果(表5)における平均点を学年間で比較した。一元配置分散分析(対応なし)を行った結果、学年間の平均点差は5%水準で有意であった $(F(2, 190) = 6.91, p < .05)$ 。TukeyのHSD法(5%水準)による多重比較を行ったところ、5、6年生は4年生に比べて有意に高い平均点を示した。

表4 仮言的三段論法に関わる学年別結果

	M	SD
4年生 n=64	0.93	0.24
5年生 n=69	0.95	0.20
6年生 n=60	0.98	0.12

表5 普遍例化に関わる学年別結果

	M	SD	多重比較
4年生 n=64	0.66	0.47	* ]
5年生 n=69	0.87	0.34	
6年生 n=60	0.88	0.32	

$p < .05$

## 4.3 調査問題Aの考察

仮言的三段論法に関わる学年別結果(表4)の正答数に有意差がなかったため、仮言的三段論法の順序で命題を並べることについて、4、5、6年生間で差があるとは言えないことが分かった。一方、普遍例化の順序で命題を並べることについて、学年別結果(表5)における4、5年生間、そして4、6年生間の正答数に有意差があったことから、4年生から5年生の間に普遍例化を用いる際の命題の順序に関する児童の理解が進んでいる可能性が指摘できる。

#### 4.4 調査問題 A、B のクロス分析結果

調査問題 A と B のクロス分析によって、仮言的三段論法、普遍例化を用いる際の命題の順序に関する児童の回答をそれぞれ 8 つに類型化（表 6）した。例えば類型 2 は、調査問題 A で仮言的三段論法の順序で命題を並べているが、調査問題 B-1 では、仮言的三段論法の順序ではないたろうくんの説明を「問題なし」と回答している児童である。仮言的三段論法、普遍例化それぞれについてクロス分析を行い類型化する（表 7、8）。

表 6 児童の回答の類型化

		調査問題 B			
		問題あり	問題なし	どちらとも いえない	無回答
調査問題 A	正答	類型 1	類型 2	類型 3	類型 4
	誤答	類型 5	類型 6	類型 7	類型 8

表 7 仮言的三段論法に関わるクロス分析

仮言的三段論法		調査問題 B-1			
		問題あり	問題なし	どちらとも いえない	無回答
調査問題 A	正答	87.6%	4.7%	2.6%	1.0%
	誤答	2.6%	1.6%	0.0%	0.0%

表 8 普遍例化に関わるクロス分析

普遍例化		調査問題 B-2			
		問題あり	問題なし	どちらとも いえない	無回答
調査問題 A	正答	76.2%	7.3%	6.2%	0.5%
	誤答	5.2%	3.6%	1.0%	0.0%

仮言的三段論法を用いる際の命題の順序に関する回答は、類型 7、8 以外の 6 つに分類された。以下は類型別の記述である。

#### 仮言低三段論法を用いる際の命題の順序に関する回答

##### 記述例 1 [類型 1] (4 年生)

②はアイと、アウの長さは等しいことをしょう明して、そして、それがしょうこで、③は②のしょうこを使って説明しているの、②があるから、③があるので、③→②はおかしいといえる

##### 記述例 2 [類型 1] (6 年生)

「アイとアウの長さが等しい」と分からないと、「三角形アイウは二等辺三角形だ」と言えないから

##### 記述例 3 [類型 2] (4 年生)

なぜならつなげってその文章をゆったときにへんなかんじもしないしわかりやすいせつめいになっているから



#### 記述例 4 [類型 2] (6 年生)

③と②のどちらが先にあっても、アイとアウの長さは等しいことがわかるので、問題はないと思う

#### 記述例 5 [類型 6] (4 年生)

いみが分かるから

普遍例化を用いる際の命題の順序に関する回答は、類型 8 以外の 7 つに分類された。以下は類型別の記述である。

### 普遍例化を用いる際の命題の順序に関する回答

#### 記述例 6 [類型 1] (5 年生)

私は④が最初に来た方がいいと思います。なぜなら、④のまえおきをしておかないと、アイウの二等辺三角形にならないと思うからです

#### 記述例 7 [類型 1] (6 年生)

②は、半径の長さは全て等しいという、円の性質を使っているから、その前に半径の長さは等しいと説明しておく必要があるから

#### 記述例 8 [類型 2] (6 年生)

説明の文がつながっているから問題はないと思いました

#### 記述例 9 [類型 3] (5 年生)

同じ事を言っているから逆でもこのままでも良い

#### 記述例 10 [類型 6] (4 年生)

アイとアウが等しいから円の半径の長さが全て等しいということになっていて文になりたっているから

### 4.5 仮言的三段論法を視点とした 4.4 の考察

仮言的三段論法に関わる児童の記述内容を考察する。記述例 1 では、“③は②のしょうこを使って説明しているから②があるから、③がある”と記述している。記述例 2 では、“「アイの長さが等しい」と分からないと、「三角形アイウは二等辺三角形だ」と言えないから”と記述しておりいずれも  $[P1 \rightarrow P3]$  を結論として導くためには、 $[P1 \rightarrow P2]$  を  $[P2 \rightarrow P3]$  より前に位置付け、 $P2$  を仲立ちとして 2 つの命題を結び付ける必要があると考えていることが考察できる。

記述例 3 では、“へんなかんじもしない”記述例 4 では、“③と②のどちらが先にあっても、アイとアウの長さは等しいことがわかる”と記述している。これらの児童が調査問題 A では  $[P1 \rightarrow P2]$ 、 $[P2 \rightarrow P3]$  の順序で命題を並べていたことから  $[P1 \rightarrow P2]$ 、 $[P2 \rightarrow P3]$  という順序でも  $[P2 \rightarrow P3]$ 、 $[P1 \rightarrow P2]$  という順序でも  $[P1 \rightarrow P3]$  を結論として導くことができると考えていることが分かる。記述例 4 から類型 2 の児童は類型 1 の児童とは異なり、必ずしも  $P2$  を仲立ちとして 2 つの命題を結び付ける必要はなく、日常論理として  $\wedge$  で結合された  $[P1 \rightarrow P2]$  と  $[P2 \rightarrow P3]$  を可換的に捉えていることが考察できる。

記述例 5 では、“いみが分かるから”と記述している。調査問題 A においても③→②の順序で命題を並べていることから、 $[P1 \rightarrow P3]$  を導くためには、 $[P2 \rightarrow P3]$ 、 $[P1 \rightarrow P2]$  の順序で命題を並べても良いと考えている可能性があるが、本調査ではその点は明らかにならない。

以上の分析から、仮言的三段論法に関わる命題の順序の理解に少なくとも2つの様相があることが指摘できる。1つ目は、 $[P1 \rightarrow P3]$ を導くためには、 $[P1 \rightarrow P2] \wedge [P2 \rightarrow P3]$ の順序で命題を並べる必要があると考えている様相、2つ目は、 $[P1 \rightarrow P3]$ を導くためには、 $[P1 \rightarrow P2]$ 、 $[P2 \rightarrow P3]$ の順序でも $[P2 \rightarrow P3]$ 、 $[P1 \rightarrow P2]$ の順序でもよいと考えている様相である。

#### 4.6 普遍例化を視点とした4.4の考察

普遍例化に関わる児童の記述内容を考察する。記述例6では、“④のまえおきをしておかないと、アイウの二等辺三角形にならない”と記述している。記述例7では、“②は、半径の長さは全て等しいという円の性質を使っているので、その前に半径の長さは等しいと説明しておく必要がある”と記述している。いずれも全称命題である④を前提にすることで単称命題である②を導く必要があると考えていることが考察できる。

一方、記述例8では、“説明の文がつながっているので問題はない”記述例9では、“同じ事を言っているので逆でもこのままでも良い”と記述していることから、全称命題と単称命題の順序を固定する必要はないと考えていることが考察できる。

記述例10では、調査問題Aでも単称命題（選択肢②）の後に全称命題（選択肢④）を位置付けた児童である。調査問題Bにおいて“アイとアウが等しいから円の半径の長さが全て等しいということになっていて”と記述している。このことから、単称命題の後に全称命題を位置付けても良いと考えている可能性があるが、本調査ではその点は明らかにならない。

以上の普遍例化を視点とした分析から、普遍例化に関わる命題の順序の理解に少なくとも2つの様相があることが指摘できる。1つ目は、全称命題から単称命題を導く順序で命題を並べる必要があると考えている様相、2つ目は、全称命題から単称命題を導く順序でも、単称命題から全称命題を導く順序でもよいと考えている様相である。

#### 4.7 調査の成果

本調査の結果、説明を構成する際の命題の順序に関する児童の理解の実態について以下の2点が明らかになった。1点目は、普遍例化の順序で命題を並べることについて4、5年生間の正答数に有意差があったことから、4、5年生の間に普遍例化を用いる際の命題の順序に関する理解が進んでいる可能性があることである。2点目は、仮言的三段論法、普遍例化に関わる命題の順序の理解に少なくともそれぞれ2つの様相があることである。児童の記述の分析によって演繹的推論を用いた説明にカリキュラムとしての位置付けがない小学校段階の子どもにおいても、仮言的三段論法や普遍例化に関わる命題の順序の理解の様相の違いが事例的に明らかになった。

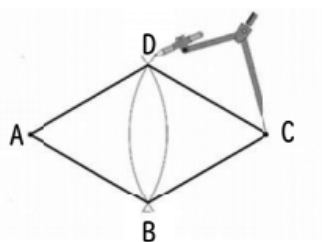
### 5. 児童実態の調査Ⅱ

調査Ⅰの結果から4、5年生の間に普遍例化を用いる際の命題の順序に関する理解が進んでいる可能性があることが示されたため、10歳前後の児童の普遍例化の理解について更に詳細な調査を実施した。国立大学附属小学校4年計66名を対象に2021年3月に図2を用いた調査を実施した。

## 5.1 調査問題と分析方法

調査問題は、選択肢から説明に必要な文を選択する「説明選択学習」の形式で調査を実施した。表2になぞらえて問題(図6)並びに、誤答を含む選択肢を設定した(表9)。まず正答の説明をする。q(a)に該当する説明は、「この図形は、辺の長さが全て等しいです」、 $\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$ に該当する説明は、「辺の長さが全て等しい四角形をひし形とといいます」、r(a)に該当する説明は、「この図形は、ひし形です」となる。これら3つを選択肢の中から選ぶことができる子どもは、普遍例化を理解していると考察できると考えた(表2)。次に誤答の説明をする。例えば誤答②は、「ひし形は向かい合った角の大きさが等しいです。」である。たしかにひし形は向かい合った角の大きさが等しいという性質をもつため、②の説明に、算数的な間違いはない。しかし本調査問題において、「この図形」と「向かい合った角の大きさが等しい」のつながりを説明した選択肢はないため、論理的につながらず誤答となる。説明選択学習に基づく調査問題を用いることで、普遍例化を用いて説明を構成する際の、児童の様相が明らかになった。

下の図のように、半径が等しい円を2つかき、交わった点と円の中心を直線で結びます。コンパスを用いているので、AB, BC, CD, ADの長さは全て等しくなります。できた四角形ABCDは、ひし形です。そのわけを説明した文がばらばらになってしまいました。



(1) 下の文の中に、説明に必要な文が3つあります。

説明に必要だと思う文を選び、解答らんじに番号を書きましょう。順番は気にしないでいいです。

- ① この図形は、四角形です。
- ② ひし形は向かい合った角の大きさが等しいです。
- ③ この図形は、ひし形です。
- ④ 辺の長さが全て等しい四角形をひし形とといいます。
- ⑤ 辺の長さが全て等しい四角形を、正方形とといいます。
- ⑥ この図形は、向かい合った辺は平行になっています。
- ⑦ この図形は、辺の長さが全て等しいです。

( ) ( ) ( )

(2) (1)を文章で表しましょう。番号と番号をつなぐために必要な言葉は、自由に付け加えてください。

図6 問題文

表 9 選択肢と設定の意図

番号	選択肢	正誤
①	この図形は、四角形です。	誤答
②	ひし形は向かい合った角の大きさが等しいです。	誤答
③	この図形は、ひし形です。	正答
④	辺の長さが全て等しい四角形をひし形といいます。	正答
⑤	辺の長さが全て等しい四角形を、正方形といいます。	誤答
⑥	この図形は、向かい合った辺は平行になっています。	誤答
⑦	この図形は、辺の長さが全て等しいです。	正答

## 5.2 児童の発話分析・考察

表 10 は、本調査問題について話し合う児童 FU と MS の発話記録である。事前調査において、児童 FU は誤答②、正答④を、児童 MS は誤答②、誤答⑥を選択していたが、二人はペアでの話し合いによって、正答である④⑦を導いている。発話記録から 2 点の児童の様相の特徴が考察できる。1 点目は、論理的なつながりを検討している児童の様相である。児童 FU は、(FU1) “まず「この図形は四角形です。」は、四角形っていうグループではあるけど、ひし形ですっていう詳しい

表 10 児童 FU と MS の発話記録 (算数科)

発話者	児童の発話 ※下線は、赤川が追記、<>内は、児童の行動
FU1	えっとまず「この図形は四角形です。」は、 <u>四角形っていうグループではあるけど、ひし形ですっていう詳しいことがわからないといけないから消しますね。</u> <①を消す>
FU2	えっとあなたの説明では、 <u>まだこの状態やったら、あの、初めて見る人とかが、コンパスを用いるので AB、BC、CD、AD の長さは全て等しくなりますって書いてるから</u>
MS1	等しいから。
FU3	等しいって書いてるけど、 <u>向かい合った角が同じかどうかっていうのは</u>
MS2	うん
FU4	<u>その初めて見るあの 3 年生とかだったらわからないかもしれない。</u> だから、その等しいっていうその理由の部分と、あと、【証拠】の部分と、あと、「向かい合った辺の長さが全て等しい四角形はひし形といいます。」っていう【理由付け】の部分があるから、それで答えとなんのは③だから、ここの説明としては、<②を消す>すべ…長さ…すべて等しい四角形を
FU5	<⑤を消す> <u>正方形は今関係ないこと</u>
MS3	関係ない
FU6	で、「辺の長さが全て等しい。」「この図形は向かい合った辺が平行になっています。」いらんから、<⑥を消す>こうなって
MS4	全部等しい…
FU7	で、 <u>まず【証拠】の部分をさっきにやって、&lt;⑦の選択肢を一番上に移動&gt;で、【理由付け】の部分をここにやって&lt;④を上から 2 番目に移動&gt;、【主張】の部分を中心にやったら&lt;③の選択肢を上から 3 番目に移動&gt;順番ができると思った。</u> だからこれでいいと思う。

ことがわからないといけないから消しますね。”と発話している。[この図形] から [四角形] に論理を進めても、[ひし形] に論理を進めることができないことを説明している発話であると考えられる。また、児童FUは、(FU5) “正方形は今関係ないこと”と述べ、児童MSも (MS3) “関係ない”と同意している。最終的に [ひし形] に論理を進める必要があるが、[正方形] に進む説明であることを捉えた上で、論理展開の問題を指摘している発話であると考えられる。

2点目は、定義と性質を読み分け、定義を前提として普遍例化を用いて説明しようとする様相である。児童MSは、事前調査において誤答②ひし形の性質である「ひし形は向かい合った角の大きさが等しいです。」を選択しており、それを児童FUに話している。これに対して、(FU2) “まだこの状態やったら、あの、初めて見る人とかが、コンパスを用いるのでAB、BC、CD、ADの長さは全て等しくなりますって書いてるから”、(FU3) “向かい合った角が同じかどうかっていうのは”、(FU4) “その初めて見るあの3年生とかだったらわからないかもしれない。”と発話している。これは、現在分かっていることは、AB、BC、CD、ADの長さが全て等しいということというひし形の定義のみであり、ひし形の性質である角の大きさについて情報は前提となっていないため、論理を進める上で使用すべきでないと考えている様相だと考察した。性質を前提としてはいけないことを、(FU4) “その初めて見るあの3年生とかだったらわからないかもしれない。”と述べている可能性があると考えている。

本調査の成果は2点ある。1点目は、小学校段階においても普遍例化を用いて説明を構成しようとする児童の様相が確認されたこと。2点目は、説明に必要な文を選択させる対話的な学びを行うことで、普遍例化を用いて説明を構成する児童の力が伸長していることである。事前調査で誤答を選んでいった児童FU、MSが発話後の事後調査で正答を選択している点から指摘できる。

## 6. 本研究の成果と今後の展望

本研究の成果は大きく3点である。1点目は、小学校算数科において、仮言的三段論法と普遍例化によって前提と結論を演繹的に結び付ける構成になっている学習材の存在が複数明らかになったことである。この成果については、第64回近畿数学教育学会誌採択論文として発表した(2020a)。2点目は、普遍例化の順序で命題を並べることについて4、5年生間の正答数に有意差があったことから、4、5年生の間に普遍例化を用いる際の命題の順序に関する理解が進んでいる可能性があることである。この成果については、数学教育学会誌61巻の採択論文として発表した(2020b)。3点目は、説明選択学習によって、事前調査と事後調査の比較から算数科において事後調査の正答率が上昇したことを示したことである。説明の取捨選択・並べ替えについての学習によって、普遍例化を用いた説明についての理解が促進した可能性が指摘できる。また授業開発・実践によって、論理的なつながりを考える児童の様相が見られたことを事例的に示したことも成果である。

今後の展望は大きく3点である。1点目は、児童実態の詳細な調査である。今回の調査では事例的に普遍例化を用いた説明についての理解が促進した可能性を指摘したものの、量的な分析には至っていない。多くの児童にとっての意義を明らかにするためにも量的な分析を視野に入れた詳細な調査を行う必要がある。2点目は児童実態の追跡調査である。本研究の対象とした児童を追跡調査することで、仮言的三段論法、普遍例化を用いて「説明」を論理的に構成する力の変容

を調査したい。3点目は、説明選択学習を中学校の証明学習で援用・実施することである。中学校段階の生徒の証明を構成する力の育成に直接的にどのように寄与するかを調査することで、説明選択学習の価値を検証できると考えている。いずれにしても中学校段階の「証明」と、小学校段階の「説明」の系統性が十分明らかになっていない現在は、小学校において目的の曖昧な算数科の説明活動が現場で散見される状況にあり、目的も方法も各教師任せになっている。系統性が少しでも明らかになれば今後小中学校間の段差が軽減され、中学校において課題となっている「証明」を構成することに関する課題の改善につながる可能性があると考えている。

## 謝辞

本研究における成果と今後の展望は、下中記念財団研究助成により得られたものです。心より厚く御礼を申し上げます。

## 【主な引用・参考文献】

赤川峰大・岡部恭幸：小学校算数科学習材の分析；仮言的三段論法を視点として．第64回近畿数学教育学会論文，pp.16-24，2020a.

赤川峰大・岡部恭幸：小学校図形領域における演繹的推論についての研究；仮言的三段論法と普遍例化に焦点をあてて，数学教育学会誌61巻1・2号，pp.39-47，2020b.

藤井齊亮：新編新しい算数3下，東京書籍，p.87，2015.

藤井齊亮：新しい算数4下，東京書籍，p.33，2020.

国立教育政策研究所：平成29年度全国学力・学習状況調査 数学B，p.9，2017.

Lin, F et al: THE READING COMPREHENSION OF GEOMETRIC PROOF : THE CONTRIBUTION OF KNOWLEDGE AND REASONING, International Journal of Science and Mathematics Education, 5 : pp. 729-754, 2007.

Miyazaki, et al: Students' understanding of the structure of deductive proof, Educational Studies in Mathematics, 94 : pp. 223-239, 2017.

文部科学省：小学校学習指導要領（平成29年公示）解説算数編，2017.

Yang, K, et al: A model of reading comprehension of geometry proof, Educational Studies in Mathematics, 67 : pp. 59-76, 2008.



赤川 峰大 先生  
(あかがわ みねひろ)

### <略歴>

1979年 兵庫県生まれ  
2001年 広島大学学校教育学部小学校教員養成課程卒業  
2002年 東広島市立高美が丘小学校 勤務  
2006年 東広島市立豊栄小学校 勤務  
2011年 東広島市立郷田小学校 勤務  
2012年 神戸大学附属住吉小学校 勤務  
2013年 神戸大学附属小学校 勤務（現 副校長）  
2020年 神戸大学人間発達環境学研究科 修士課程修了  
現在に至る

### <主な研究歴>

#### 所属学会

数学教育学会，日本数学教育学会，日本教育実践学会，近畿数学教育学会

#### 査読審査付論文

- 1) 赤川峰大・岡部恭幸：小学校における児童の推移律の理解に関する一考察，数学教育学会誌 60巻3・4号，pp. 71-76，2019.
- 2) 赤川峰大・岡部恭幸：小学校算数科学習材の分析；仮言的三段論法を視点として．第64回近畿数学教育学会論文，pp. 16-24，2020.
- 3) 赤川峰大・岡部恭幸：小学校図形領域における演繹的推論についての研究；仮言的三段論法と普遍例化に焦点をあてて，数学教育学会誌 61巻1・2号，pp. 39-47，2020.

### <勤務校>

神戸大学附属小学校

〒673-0878 兵庫県明石市山下町3番4号

電話 078-912-1642